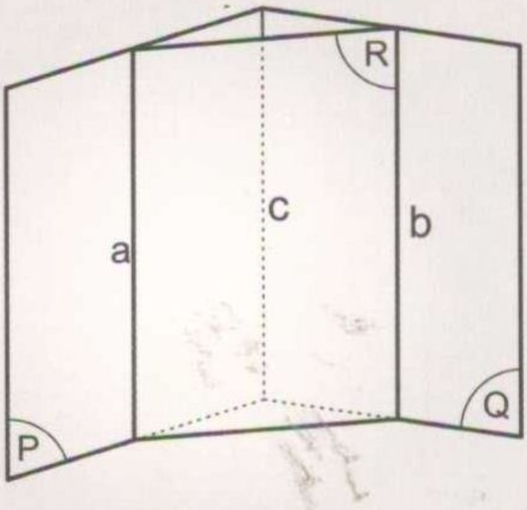
NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

GIẢI BÀI TẬP
HÌNH HỌC
11
NÂNG CAO



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

Giải bài tập
HÌNH HỌC 11
NÂNG CAO

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Đơn vị liên kết :
Công ty Sách hoa hồng

Lời nói đầu

Theo tinh thần đổi mới phương pháp dạy và học hiện nay, chúng tôi biên soạn quyển sách này theo cấu trúc như sau:

- ***Tóm tắt lí thuyết**: Giúp học sinh nắm vững và củng cố kiến thức cơ bản bài học.*
- ***Hệ thống bài tập**: Giúp học sinh vận dụng và rèn luyện kĩ năng tư duy toán học.*
- *Đặc biệt có phần **Bài tập làm thêm** giúp học sinh làm quen với cách vận dụng kiến thức toán đã học để giải quyết tốt các dạng bài tập thường gặp trong các kì kiểm tra, thi cử.*

Quý phụ huynh có thể tham khảo quyển sách này để giúp đỡ, kiểm tra việc ôn tập ở nhà của con em mình. Quý thầy cô có thể xem đây như là tài liệu tham khảo thêm.

Chúng tôi mong đón nhận ý kiến xây dựng từ quý độc giả.

NHÓM BIÊN SOẠN

CHƯƠNG 1 **PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG**

§1. MỞ ĐẦU VỀ PHÉP BIẾN HÌNH

§2. PHÉP TỊNH TIẾN VÀ PHÉP DỜI HÌNH

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Phép biến hình :

Một quy tắc với mỗi điểm M trong mặt phẳng xác định một điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy gọi là một phép biến hình.

$$f: M \mapsto M'$$

M' là ảnh của M qua phép biến hình f.

2. Ảnh của một hình :

Cho hình $\mathcal{H}$ và phép biến hình f.

$\mathcal{H}' = f(\mathcal{H}) = \{M' / M' = f(M)\}$ *gọi là ảnh của hình $\mathcal{H}$ qua phép biến hình f.*

3. Phép tịnh tiến :

Cho vectơ $\vec{u}$, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$, kí hiệu là $T_{\vec{u}}$ là phép biến hình biến điểm M thành M' sao cho : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

4. Tính chất :

a) $T_{\vec{u}}$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$

$T_{\vec{u}}(M) = M'$, $T_{\vec{u}}(N) = N'$ thì $M'N' = MN$.

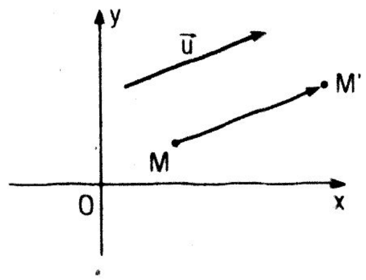
b) $T_{\vec{u}}$ biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

c) Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.

d) Biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho phép tịnh tiến theo $\vec{u} = (a; b)$

Giả sử $T_{\vec{u}} M(x; y) \mapsto M'(x'; y')$



Ta có : $\begin{cases} x = x + a \\ y = y + b \end{cases}$

5. Phép dời hình :

a) Định nghĩa

Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

b) Định lí

Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. *Qua phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d'. Trong trường hợp nào thì: d trùng d' ? d song song d' ? d cắt d' ?*

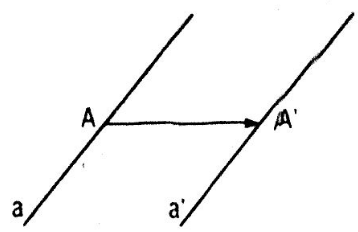
Giải

- Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của d thì d trùng với d'.
- Nếu $\vec{u}$ không là vetơ chỉ phương của d thì d // d'.
- d không bao giờ cắt d'.

2. *Cho hai đường thẳng song song a và a'. Tìm tất cả những phép tịnh tiến biến a thành a'.*

Giải

Lấy điểm A trên a thì với mỗi điểm A' trên a', phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến a thành a'. Đó là tất cả những phép tịnh tiến cần tìm.



3. *Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ theo vectơ $\vec{u}$ và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ theo vectơ $\vec{v}$. Với điểm M bất kì, $T_{\vec{u}}$ biến M thành M', $T_{\vec{v}}$ biến M' thành điểm M''. Chứng tỏ rằng phép biến hình biến M thành M'' là một phép tịnh tiến.*

Giải

Ta có $T_{\vec{u}} : M \to M'$

$T_{\vec{v}} : M' \to M''$

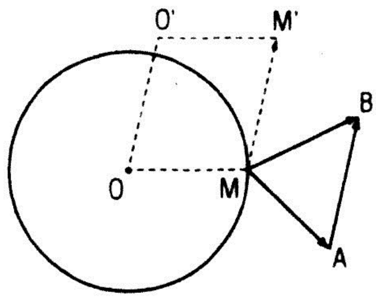
Suy ra : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$.

Do đó : $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{u} + \vec{v}$

Vậy phép biến hình biến M thành M'' là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} + \vec{v}$.

4. *Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O). Tìm quỹ tích điểm M' sao cho* $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

Giải



Ta có $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$ nên phép tịnh tiến T theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ biến M thành M'. Nếu gọi O' là ảnh của O qua phép tịnh tiến T, tức $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$ thì quỹ tích M' là đường tròn tâm O' có bán kính bằng bán kính đường tròn (O).

5. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, với α, a, b là những số cho trước, xét phép biến hình F biến mỗi điểm M(x ; y) thành M'(x' ; y'), trong đó :*

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases}$$

a) Cho hai điểm $M(x_1 ; y_1)$, $N(x_2 ; y_2)$ *và gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép F. Hãy tìm toạ độ của M' và N'.*

b) Tính khoảng cách d giữa M và N; khoảng cách d' giữa M' và N'.

c) Phép F có phải là phép dời hình không ?

d) Khi α = 0, chứng tỏ rằng F là phép tịnh tiến.

Giải

a) M' có toạ độ $(x'_1 ; y'_1)$ với : $\begin{cases} x'_1 = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha + a \\ y'_1 = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha + b. \end{cases}$

N' có toạ độ $(x'_2 ; y'_2)$ với : $\begin{cases} x'_2 = x_2\cos\alpha - y_2\sin\alpha + a \\ y'_2 = x_2\sin\alpha + y_2\cos\alpha + b. \end{cases}$

b) Ta có : $d = MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$,

$d' = M'N' = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2}$

$= \sqrt{[(x_1 - x_2)\cos\alpha - (y_1 - y_2)\sin\alpha]^2 + [(x_1 - x_2)\sin\alpha + (y_1 - y_2)\cos\alpha]^2}$

$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2\cos^2\alpha + (y_1 - y_2)^2\sin^2\alpha + (x_1 - x_2)^2\sin^2\alpha + (y_1 - y_2)^2\cos^2\alpha}$

$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

c) Từ kết quả ở câu b) suy ra M'N' = MN và do đó F là phép dời hình.

d) Khi $\alpha = 0$, ta có $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$

Vậy, F là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(a ; b)$.

6. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xét các phép biến hình sau đây :*

- *Phép biến hình F_1 biến mỗi điểm $M(x ; y)$ thành điểm $M'(y ; -x)$.*
- *Phép biến hình F_2 biến mỗi điểm $M(x ; y)$ thành điểm $M'(2x ; y)$.*

Trong hai phép biến hình trên, phép nào là phép dời hình?

Giải

■ Lấy hai điểm bất kỳ $M = (x_1 ; y_1)$ và $N(x_2 ; y_2)$, khi đó

$$MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Ảnh của M, N qua F_1 lần lượt là $M' = (y_1 ; -x_1)$ và $N' = (y_2 ; -x_2)$.

Như vậy ta có : $M'N' = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (-x_1 + x_2)^2}$.

Suy ra M'N' = MN, vậy F_1 là phép dời hình.

■ Ảnh của M, N qua F_2 lần lượt là $M' = (2x_1 ; y_1)$ và $N' = (2x_2 ; y_2)$.

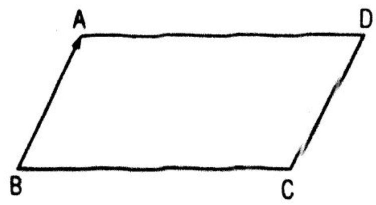
Như vậy ta có : $M'N' = \sqrt{4(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Từ đó suy ra nếu $x_1 \neq x_2$ thì $M'N' \neq MN$, vậy F_2 không phải là phép dời hình.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Một hình bình hành ABCD có hai đỉnh A, B cố định, còn đỉnh C thay đổi trên một đường tròn (O). Tìm quỹ tích đỉnh D.*

Hướng dẫn : ABCD là hình bình hành nên : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$. Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$ biến C thay đổi trên đường tròn (O) thì quỹ tích đỉnh D là đường tròn (O') ảnh của đường tròn (O) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$.



2. *Cho hai đường tròn (O) và (O') và hai điểm A, B. Tìm điểm M trên (O) và điểm M' trên (O') sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.*

Hướng dẫn : M cần tìm là giao điểm (nếu có) của (O') với đường tròn (O_1) ảnh của (O) qua phép tịnh tiến $\overrightarrow{AB}$.

3. *Cho đường tròn (O ; R) và một điểm I cố định. AB là đường kính thay đổi của (O). Đường thẳng qua B và song song với OI cắt đường thẳng AI tại D. Tìm quỹ tích điểm D.*

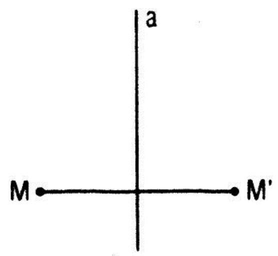
Hướng dẫn : $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{OI}$.

§3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. <u>Định nghĩa phép đối xứng trục</u> :

Điểm M' gọi là đối xứng với điểm M qua đường thẳng a nếu a là đường trung trực của đoạn thẳng MM'. Nếu M nằm trên a thì ta xem M đối xứng với chính nó qua a.



Định nghĩa 1

Phép đối xứng qua đường thẳng a, kí hiệu là $Đ_a$ là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua a.

Đường thẳng a gọi là trục của phép đối xứng, hay đơn giản là trục đối xứng.

2. <u>Định lí</u> :

Phép đối xứng trục là một phép dời hình.

3. <u>Trục đối xứng của một hình</u> :

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình $\mathcal{H}$ nếu phép đối xứng trục $Đ_d$ biến $\mathcal{H}$ thành chính nó, tức là : $Đ_d(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

7. *Qua phép đối xứng trục $Đ_a$ (a là trục đối xứng), đường thẳng d biến thành đường thẳng d'. Hãy trả lời các câu hỏi sau :*

a) Khi nào thì d song song với d'?

b) Khi nào thì d trùng với d'?

c) Khi nào thì d cắt d'? Giao điểm của d và d' có tính chất gì?

d) Khi nào d vuông góc với d'?

Giải

a) Khi d // a thì d // d'.

b) Khi d vuông góc với a hoặc d trùng với a thì d trùng với d'.

c) Khi d cắt a nhưng không vuông góc với a. Khi đó giao điểm của d và d' nằm trên a.

d) Khi góc giữa d và a bằng 45^0 thì d $\perp$ d'.

8. *Trong mặt phẳngtoạ độ Oxy, cho các đường tròn $(\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$ lần lượt có phương trình :*

$$(\mathcal{C}_1) : x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0;$$

$$(\mathcal{C}_2) : x^2 + y^2 + 10y - 5 = 0.$$

Viết phương trình ảnh của các đường tròn trên qua phép đối xứng có trục Oy.

Giải

Ta có $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = \frac{37}{4}$

$(\mathcal{C}_1)$ có tâm $I_1(2 ; -\frac{5}{2})$ và bán kính $R_1 = \frac{\sqrt{37}}{2}$

Gọi I'_1 là ảnh của I_1 qua phép đối xứng có trục Oy thì $I'_1(-2 ; -\frac{5}{2})$.

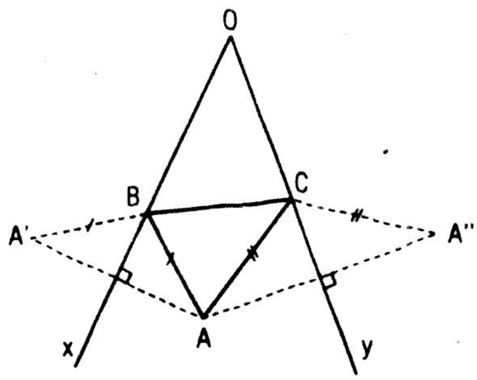
Vậy phương trình ảnh $(\mathcal{C}'_1)$ của $(\mathcal{C}_1)$ qua phép đối xứng trục Oy là :

$$(x + 2)^2 + (y + \frac{5}{2}) = \frac{37}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$$

Tương tự $(\mathcal{C}'_2) : x^2 + y^2 + 10y - 5 = 0$ chính là phương trình ảnh của $(\mathcal{C}_2)$

9. *Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Hãy xác định điểm B trên Ox và điểm C trên Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.*

Giải



Xét tam giác bất kì ABC có B và C lần lượt nằm trên hai tia Ox và Oy. Gọi A' và A" là các điểm đối xứng với điểm A lần lượt qua các đường thẳng Ox và Oy. Ta có AB = A'B và AC = A"C (do các ΔABA' và ΔACA" là các tam giác cân). Gọi 2p là chu vi của tam giác ABC thì :

$$2p = AB + BC + CA = A'B + BC + CA" \geq A'A"$$

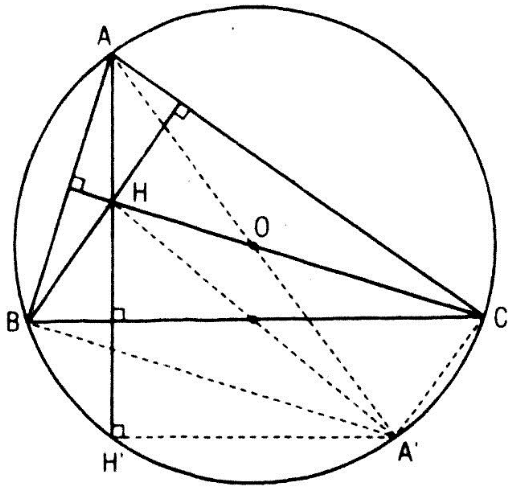
Dấu "=" xảy ra khi bốn điểm A', B, C, A" thẳng hàng. Suy ra để chu vi tam giác ABC bé nhất thì phải lấy B và C lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng A'A" với hai tia Ox và Oy (các giao điểm đó tồn tại vì góc xOy nhọn).

10. *Cho hai điểm B, C cố định nằm trên đường tròn (O ; R) và điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng trục để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.*

Hướng dẫn : Khi BC không phải là đường kính, gọi H' là giao điểm của đường thẳng AH với đường tròn (O ; R). Chứng minh rằng H đối xứng với H' qua đường thẳng BC.

Giải

Trường hợp BC là đường kính thì H trùng A, do đó H nằm trên đường tròn cố định (O ; R).



Xét trường hợp BC không là đường kính. Giả sử đường thẳng AH cắt đường tròn (O ; R) tại H'. Như vậy với mỗi điểm A $\in$ (O ; R), khác với B và C thì ta xác định điểm H' $\in$ (O ; R). Gọi AA' là đường kính của đường tròn (O ; R) thì A'B // CH (vì cùng vuông góc với AB) và A'C // BH (vì cùng vuông góc AC) nên A'BHC là hình bình hành. Vậy BC đi qua trung điểm của HA'. Mặt khác BC // A'H' (vì cùng vuông góc với AH) nên BC cũng đi qua trung điểm của HH', do đó H và H' đối xứng với nhau qua BC. Nếu gọi Đ là đối xứng có trục là đường thẳng BC thì Đ biến H' thành H. Nhưng H' luôn luôn nằm trên (O ; R) nên H nằm trên đường tròn cố định là ảnh của đường tròn (O ; R) qua phép đối xứng trục Đ.

Cách khác : Gọi H' là điểm đối xứng của H qua BC. Chứng minh tứ giác ABH'C nội tiếp, từ đó suy ra H' nằm trên (O ; R)

11. *a) Chỉ ra trục đối xứng (nếu có) của mỗi hình sau đây (mỗi hình là một từ bao gồm một số chữ cái) :*

MÂM, HOC, NHANH, HE, SHE, COACH, IS, IT, SOS, CHEO

b) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số chẵn luôn có trục đối xứng.

Giải

a) Các hình có trục đối xứng là những từ sau đây (các từ còn lại không có trục đối xứng) :

MÂM **HOC** **HE** **CHEO**